

第4讲 二次函数实际问题

用二次函数的图象和性质解决实际问题：

首先应按题意建立合适的函数关系式，特别注意 自变量 和 函数 表示的实际意义；

然后再利用二次函数的图象和性质解决所求问题。

二次函数在实际中的应用主要有以下两个方面：

(1) 结合二次函数的图象求最值问题。这类问题解题时往往会使用配方法去求二次函数图象的顶点式，主要的题型有：

①二次函数与面积最大化问题

②二次函数与利润增长率问题

(2) 利用二次函数优化构建坐标系解决实际问题。这类问题解题时往往需要根据题目的要求自己建立平面直角坐标系，再利用二次函数的性质解题，主要类型有：

①二次函数与拱桥问题

②二次函数与投篮、喷泉类问题

一、最值应用问题

1. 面积问题

面积最大值问题，一般先应用几何图形的面积公式，写出图形的面积与边长之间的关系，列出方程，按照二次函数求最大值的方法，结合二次函数性质和自变量的取值范围确定最大面积。

【注意】 自变量 的取值范围

【备注】解决不规则图形面积问题，关键是将其分割组合成规则图形，找出各部分面积的关系；对于阴影部分的面积可以利用两个方法：①整体减空白、②将阴影部分进行平移后的到完整的图形再求面积；利用墙面围篱笆这部分，一定要注意 自变量的取值范围，若涉及到开门问题不要忘记周长要加上门的长度；平面图形旋转得立体图形部分，需要带领学生复习常见立体图形表面积公式（如：圆柱的侧面积 $S_{\text{柱侧}} = 2\pi rh$ ，表面积 $S_{\text{柱表}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ ，若开盖则只加一个 πr^2 ）

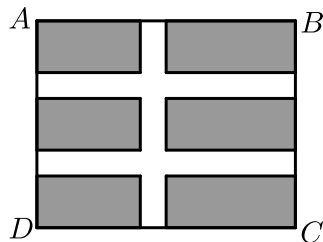
 举个“栗”子

 栗子

 阴影部分面积相关

1. 2019~2020学年贵州遵义初三上学期期末第22题12分 ★★★

如图，为美化中心城区环境，政府计划在长为 30 米，宽为 20 米的矩形场地 $ABCD$ 上修建公园．其中要留出宽度相等的三条小路，且两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分建成花圃．



- (1) 若花圃总面积为 448 平方米，求小路宽为多少米？
- (2) 已知某园林公司修建小路的造价 y_1 (元) 和修建花圃的造价 y_2 (元) 与修建面积 s (平方米) 之间的函数关系分别为 $y_1 = 40s$ 和 $y_2 = 35s + 20000$ ．若要求小路宽度不少于 2 米且不超过 4 米，求小路宽为多少米时修建小路和花圃的总造价最低？

【答案】 (1) 小路的宽为 2 米．

(2) 小路的宽为 2 米时修建小路和花圃的总造价最低．

【解析】 (1) 设小路的宽为 m 米，则可列方程 $(30 - m)(20 - 2m) = 448$ ，

解得： $m_1 = 2$ 或 $m_2 = 38$ (舍去)，

答：小路的宽为 2 米．

(2) 设小路的宽为 x 米，总造价为 w 元，

则花圃的面积为 $(30 - x)(20 - 2x) = (2x^2 - 80x + 600)$ 平方米，小路面积为

$30 \times 20 - (2x^2 - 80x + 600) = (-2x^2 + 80x)$ 平方米，

所以 $w = 40 \cdot (-2x^2 + 80x) + 35 \cdot (2x^2 - 80x + 600) + 20000$ ，

整理得： $w = -10(x - 20)^2 + 45000$ ，

$\because -10 < 0$ ，对称轴为 $x = 20$ ，

$\therefore$ 当 $2 \leq x \leq 4$ 时， w 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， w 取最小值，

答：小路的宽为 2 米时修建小路和花圃的总造价最低．

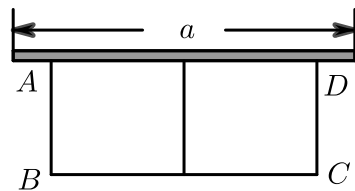
【标注】【知识点】二次函数的几何问题

栗子

篱笆围矩形问题

2. 2019~2020 学年 11 月天津河东区天津市华英中学初三上学期月考 (第一学片) 第 23 题 10 分 ★★★

如图，有长为 24m 的篱笆，现一面利用墙 (墙的最大可用长度 a 为 9m) 围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃，设花圃的宽 AB 为 x m，面积为 S m²．



- (1) 求 S 与 x 的函数关系式及 x 值的取值范围 .
- (2) 要围成面积为 36m^2 的花圃 , AB 的长是多少米 .
- (3) 当 AB 的长是多少米时 , 围成的花圃面积最大 .

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 24x (5 \leq x < 8)$.

(2) AB 长为 6m 时 , 围成面积为 36m^2 的花圃 .

(3) AB 长是 5m 时 , 围成的花圃面积最大 .

【解析】 (1) 根据题意 , 得 $S = x(24 - 3x)$,

即所求的函数解析式为 : $S = -3x^2 + 24x$,

又 $\because 0 < 24 - 3x \leq 9$,

$\therefore 5 \leq x < 8$.

(2) 根据题意 , 设 AB 长为 x , 则 BC 长为 $24 - 3x$,

$\therefore -3x^2 + 24x = 36$.

整理 , 得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

解得 $x = 2$ 或 6 ,

当 $x = 2$ 时 , $BC = 24 - 6 = 19 > 9$ 不成立 ,

当 $x = 6$ 时 , $BC = 24 - 18 = 6 < 9$ 成立 ,

$\therefore AB$ 长为 6m .

答 : AB 的长是 6m 时 , 围成面积为 36m^2 的花圃 .

(3) $S = 24x - 3x^2 = -3(x - 4)^2 + 48$,

$\because$ 墙的最大可用长度为 9m , $0 \leq BC = 24 - 3x \leq 9$,

$\therefore 5 \leq x < 8$,

$\because$ 对称轴 $x = 4$, 开口向下 ,

$\therefore$ 当 $x = 5\text{m}$, 有最大面积的花圃 .

即 : $AB = 5\text{m}$,

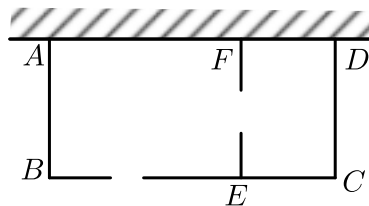
最大面积 $= 24 \times 5 - 3 \times 5^2 = 45\text{m}^2$.

答 : AB 的长是 5m 时 , 围成的花圃面积最大 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

3. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第23题 ★★★

一农户用篱笆及一面墙（该墙可用最大长度为36米）围成一个矩形场地 $ABCD$ ，该场地中间隔有一道与 AB 平行的篱笆（ EF ），如图， BE 、 EF 上各留有1米宽的门（门不需要篱笆），该农户共用篱笆58米，设该矩形的一边 AB 长 x 米， $AD > AB$ ，矩形 $ABCD$ 的面积为 S 平方米，



- (1) 求出 S 与 x 的函数关系式，直接写出自变量 x 的取值范围。
- (2) 若矩形 $ABCD$ 的面积为252平方米，求 AB 的长。
- (3) 怎样围才能是围成的场地面积最大？最大面积是多少？

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 60x$ ($8 \leq x < 15$) .

(2) 14米 .

(3) 当 AB 长为10米时，围成的场地面积最大，最大面积为 300m^2 .

【解析】 (1) 由题意得： $BC - 1 = 58 - x - x - (x - 1)$,

$$\therefore BC = 60 - 3x ,$$

$$\therefore ABCD \text{ 的面积：} S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x ,$$

$$\because 60 - 3x \leq 36 , 60 - 3x > x ,$$

$$\therefore 8 \leq x < 15 , \text{ 即 } S = -3x^2 + 60x (8 \leq x < 15) .$$

$$(2) \text{ 由题意得：} S = -3x^2 + 60x = 252 ,$$

$$\text{解得：} x = 14 \text{ 或 } 6 ,$$

$$\because \text{由第一问知 } 8 \leq x < 15 ,$$

$$\therefore x = 14 , \text{ 故 } AB \text{ 长为 } 14 \text{ 米} .$$

$$(3) S = -3x^2 + 60x = -3(x - 10)^2 + 300 ,$$

$$\because -3 < 0 ,$$

$$\therefore \text{抛物线开口向下，} S \text{ 有最大值，}$$

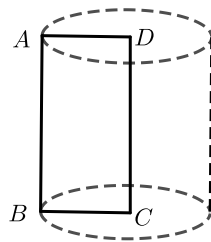
$$\text{当 } x = 10 \text{ 时，} S \text{ 取最大值 } 300 ,$$

$$\text{故当 } AB \text{ 长为 } 10 \text{ 米时，围成的场地面积最大，最大面积为 } 300\text{m}^2 .$$

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

4. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期末第23题10分 ★★★

如图，已知矩形 $ABCD$ 的周长为 36cm ，矩形绕它的一条边 CD 旋转形成一个圆柱．设矩形的一边 AB 的长为 $x\text{cm}$ ($x > 0$)，旋转形成的圆柱的侧面积为 $S\text{cm}^2$ ．



(1) 用含 x 的式子表示：

矩形的另一边 BC 的长为 _____ cm ，

旋转形成的圆柱的底面圆的周长为 _____ cm ．

(2) 求 S 关于 x 的函数解析式及自变量 x 的取值范围．

(3) 求当 x 取何值时，矩形旋转形成的圆柱的侧面积最大．

(4) 若矩形旋转形成的圆柱的侧面积等于 $18\pi\text{cm}^2$ ，则矩形的长是 _____ cm ，宽是 _____ cm ．

【答案】 (1) $18 - x$ ； $(36 - 2x)\pi$

(2) $S = -2\pi x^2 + 36\pi x$ ($0 < x < 18$)．

(3) 9．

(4) $9 + 6\sqrt{2}$ ； $9 - 6\sqrt{2}$

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，周长是 36cm ， AB 的长是 $x\text{cm}$ ，

$\therefore BC$ 的长是 $36 \div 2 - x = (18 - x)\text{cm}$ ，

旋转成的圆柱的底面圆的周长 $= 2\pi(18 - x) = (36 - 2x)\pi\text{cm}$ ．

(2) 由题意可得，

$$S = 2\pi \left(\frac{36}{2} - x \right) \cdot x = -2\pi x^2 + 36\pi x,$$

即 S 与 x 的函数关系式是 $S = -2\pi x^2 + 36\pi x$ ($0 < x < 18$)．

(3) $\because S = -2\pi x^2 + 36\pi x = -2\pi(x - 9)^2 + 162\pi$ ，

$\therefore$ 当 $x = 9$ 时，圆柱的侧面积最大，最大值是 162π ．

(4) 令 $S = 18\pi$ ，

$$\text{则 } 18\pi = -2\pi x^2 + 36\pi x,$$

$$\text{解得, } x = 9 \pm 6\sqrt{2},$$

$$\text{当 } x = 9 + 6\sqrt{2} \text{ 时, } \frac{36}{2} - x = 9 - 6\sqrt{2},$$

$$\text{当 } x = 9 - 6\sqrt{2} \text{ 时, } \frac{36}{2} - x = 9 + 6\sqrt{2},$$

由上可得，矩形的长是 $9 + 6\sqrt{2}\text{cm}$ ，宽是 $9 - 6\sqrt{2}\text{cm}$ ．

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

2. 利润问题

利润问题通常是先求两个变量之间的一次函数关系，再求二次函数关系，然后转化为二次函数的最值，利用图象解决问题。

【注意】自变量的取值范围

常用公式：

- ① 利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\%$ ；
- ② 每件利润 = 销售单价 - 成本单价 ；
- ③ 销售额 = 销售单价 $\times$ 销售量 ；
- ④ 总利润 = 销售额 - 总成本 = 每件利润 $\cdot$ 销售量 ；

【备注】利润问题中，设售价为 x 和设涨降价为 x 的函数解析式是不同的；此外，总销量通常来说都是一次函数，讲解时可以先带领学生复习一次函数解析式。求二次函数最值时一定要注意自变量的取值范围，并不是所有的问题都能在对称轴处取得最大(小)值，要将自变量的取值范围结合开口方向以及离对称轴的远近进行选取。

栗子

设降(涨)价为 x 型

5. 2020~2021学年天津南开区初三上学期中第23题10分 ★★★

已知超市中某商品的进价为每件 20 元，售价为每件 30 元，每个月可卖出 180 件，如果每件商品的售价每上涨 1 元，则每个月就会少卖出 10 件，但每件售价必须低于 34 元，设每件商品的售价上涨 x 元 (x 为非负整数)，每个月的销售利润为 y 元。

- (1) 求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围。
- (2) 利用函数关系式求出每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？
- (3) 利用函数关系式求出每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是 1920 元？这时每件商品的利润率是多少？

【答案】(1) $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x < 4$ ，且 x 为整数)

(2) 每件售价为 33 元时，每个月可获得最大利润，最大利润是 1950 元。

(3) 60%。

【解析】(1) 依题意， $y = (30 - 20 + x)(180 - 10x)$ ，

化简得， $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x < 4$ ，且 x 为整数)。

(2) 由 (1) 得， $y = -10x^2 + 80x + 1800 = -10(x - 4)^2 + 1960$ ，

$\because a = -10 < 0$ ，

∴当 $x < 4$ 时, y 随着 x 的增大而增大,

∴ $0 \leq x < 4$, 且 x 为整数,

∴当 $x = 3$ 时, $y_{\text{最大}} = -10(3 - 4)^2 + 1960 = 1950$.

故每件商品的售价为 33 元时, 每个月可获得最大利润, 最大利润是 1950 元.

(3) 由题意, $1920 = -10x^2 + 80x + 1800$,

整理得, $x^2 - 8x + 12 = 0$, 解得 $x_1 = 2$ 或 $x_2 = 6$,

∴ $0 \leq x < 4$, 且 x 为整数,

∴ $x = 2$,

∴此时的售价为 32 元, 则利润率为: $\frac{32 - 20}{20} \times 100\% = 60\%$.

故每件商品的售价为 32 元, 每个月的利润恰好是 1920 元, 这时每件商品的利润率是 60%.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

栗子

设售价为 x 型

6. 2020~2021 学年天津和平区初三上学期中第 23 题 10 分 ★★★★★

某商店销售一种销售成本为每件 40 元的玩具, 若按每件 50 元销售, 一个月可售出 500 件. 销售价每涨 1 元, 月销售量就减少 10 件. 设销售价为每件 x 元 ($x \geq 50$), 月销量为 y 件, 月销售利润为 w 元.

(1) 当销售价为每件 60 元时, 月销量为 _____ 件, 月销售利润为 _____ 元.

(2) 写出 y 与 x 的函数解析式和 w 与 x 的函数解析式.

(3) 当销售价定为每件多少元时会获得最大利润? 求出最大利润.

【答案】 (1) 400; 8000

(2) $y = 1000 - 10x$, $w = -10x^2 + 1400x - 40000$.

(3) 当销售价定为每件 70 元时会获得最大利润, 最大利润为 9000 元.

【解析】 (1) 由题意得,

月销量为: $500 - (60 - 50) \times 10 = 500 - 100 = 400$ (件),

月销售利润为: $(60 - 40) \times 400 = 8000$ (元).

(2) 由题意得,

$y = 500 - 10(x - 50) = 1000 - 10x$,

$w = (x - 40)(1000 - 10x) = -10x^2 + 1400x - 40000$.

(3) 由 (II) 可知,

$$w = -10x^2 + 1400x - 40000$$

$$= -10(x - 70)^2 + 9000,$$

当 $x = 70$ 时, w 取最大值 9000,

故当销售价定为每件 70 元时会获得最大利润, 最大利润为 9000 元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

栗子

涨(降)价非 1 元型

7. 2018~2019 学年 9 月河南洛阳洛龙区华洋国际学校初三上学期月考第 22 题 12 分 ★★★

某公司为一工厂代销一种建筑材料(这里的代销是指厂家先免费提供货源,待货物售出后再进行结算,未售出的由厂家负责处理).当每吨售价为 260 元时,月销售量为 45 吨.该经销店为提高经营利润,准备采取降价的方式进行促销.经市场调查发现:当每吨售价每下降 10 元时,月销售量就会增加 7.5 吨.综合考虑各种因素,每售出一吨建筑材料共需支付厂家及其它费用 100 元.设每吨材料售价为 x (元),该经销店的月利润为 y (元).

- (1) 当每吨售价是 240 元时,计算此时的月销售量.
- (2) 求出 y 与 x 的函数关系式(不要求写出 x 的取值范围).
- (3) 该经销店要获得最大月利润,售价应定为每吨多少元?
- (4) 小静说:“当月利润最大时,月销售额也最大.”你认为对吗?请说明理由.

【答案】 (1) 60 吨.

$$(2) y = -\frac{3}{4}x^2 + 315x - 24000.$$

(3) 要获得最大月利润,售价应为每吨 210 元.

(4) 小静说的不对,证明见解析.

【解析】 (1) 由题意得: $45 + \frac{260 - 240}{10} \times 7.5 = 60$ (吨).

$$(2) \text{由题意得: } y = (x - 100) \left(45 + \frac{260 - x}{10} \times 7.5 \right),$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 + 315x - 24000.$$

$$(3) y = -\frac{3}{4}x^2 + 315x - 24000,$$

$$= -\frac{3}{4}(x - 210)^2 + 9075,$$

$\therefore$ 要获得最大月利润, 售价应为每吨 210 元.

(4) 我认为小静说的不对, 理由如下:

当月利润最大时, $x = 210$, 此时月销售额为 17325 元,

而当 $x = 200$ 时, 月销售额为 18000 元,

$\therefore 17325 < 18000$,

∴当月利润最大时，月销售额不是最大，
∴小静说的不对．

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

二、建立直角坐标系解决问题

1. 拱桥问题

利用二次函数解决抛物线的隧道、大桥和拱门等实际问题时，要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上，从而确定抛物线所对应的函数解析式，通过解析式解决一些测量问题或其他问题．

【注意】构建二次函数模型时，**建立适当的平面直角坐标系**是关键。

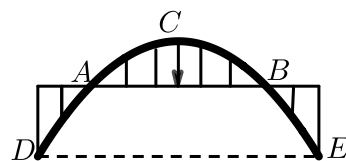
【备注】在解决抛物线形建筑问题时，首先要建立直角坐标系，一般建立坐标系时：

- ①不改变实际问题中抛物线的**开口方向**（如隧道、拱桥总是开口向下）；
- ②多以 y 轴为对称轴，至于 x 轴，通常以**地平面、水平面或过顶点的直线**为多，其基本原则是以解析式简单和便于计算为前提．

栗子

8. 2013年山西太原中考真题第18题3分 ★★★

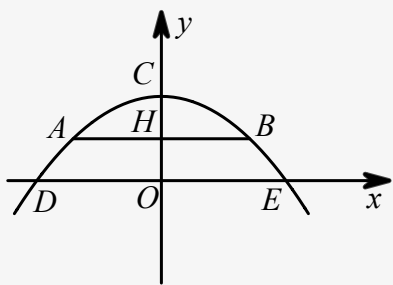
如图是我省某地一座抛物线形拱桥，桥拱在竖直平面内，与水平桥面相交于 A 、 B 两点，拱桥最高点 C 到 AB 的距离为 9m ， $AB = 36\text{m}$ ， D 、 E 为拱桥底部的两点，且 $DE \parallel AB$ ，点 E 到直线 AB 的距离为 7m ，则 DE 的长为 _____ m ．



【备注】建系方法不唯一

【答案】 48

【解析】



如图所示，建立平面直角坐标系， x 轴在直线 DE 上， y 轴经过最高点 C 。

设 AB 与 y 轴交于点 H ，

$$\therefore AB = 36,$$

$$\therefore AH = BH = 18,$$

由题可知：

$$OH = 7, CH = 9,$$

$$\therefore OC = 9 + 7 = 16,$$

设该抛物线的解析式为： $y = ax^2 + k$ ，

$$\therefore \text{顶点 } C(0, 16),$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = ax^2 + 16,$$

代入点 $(18, 7)$ ，

$$\therefore 7 = 18 \times 18a + 16,$$

$$\therefore 7 = 324a + 16,$$

$$\therefore 324a = -9,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{36},$$

$$\therefore \text{抛物线：} y = -\frac{1}{36}x^2 + 16,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时，} 0 = -\frac{1}{36}x^2 + 16,$$

$$\therefore -\frac{1}{36}x^2 = -16,$$

$$\therefore x^2 = 16 \times 36 = 576,$$

$$\therefore x = \pm 24,$$

$$\therefore E(24, 0), D(-24, 0),$$

$$\therefore OE = OD = 24,$$

$$\therefore DE = OD + OE = 24 + 24 = 48.$$

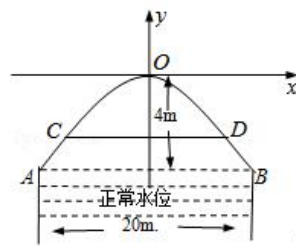
【标注】【知识点】建立平面直角坐标系解抛物线的实际问题

栗子

通行问题

9. 2015~2016学年12月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第24题8分 ★★★

有一座抛物线形拱桥，在正常水位 AB 时，桥下水面宽度为 20m ，拱顶距水面 4m 。



(1) 求出该抛物线的解析式。

(2) 设正常水位时，桥下的水深为 1.8m ，为保证过往船只顺利航行，桥下水面宽度不得小于 18m ，求水深超过多少米时，就会影响过往船只在桥下顺利航行。

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{25}x^2$ 。

(2) 2.56 。

【解析】 (1) 设该抛物线的解析式是 $y = ax^2$ ，

结合图象，把 $(10, -4)$ 代入，得

$$100a = -4,$$

$$a = -\frac{1}{25}.$$

则该抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{25}x^2$ 。

(2) 当 $x = 9$ 时，则有 $y = -\frac{1}{25} \times 81 = -3.24$ (米)，

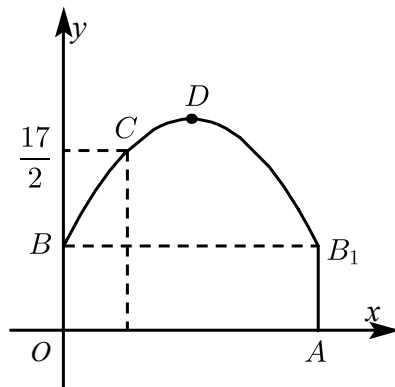
$$4 + 1.8 - 3.24 = 2.56 \text{ (米)}.$$

所以水深超过 2.56 米时就会影响过往船只在桥下的顺利航行。

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

10. 2018~2019学年辽宁鞍山台安县初三上学期期中模拟第24题10分 ★★★

如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长是 12m ，宽是 4m 。按照图中所示的直角坐标系，抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示，且抛物线的点 C 到墙面 OB 的水平距离为 3m 时，到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}\text{m}$ 。



(1) 求该抛物线的函数关系式，并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离。

- (2) 一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为 6m，宽为 4m，如果隧道内设双向行车道，那么这辆货车能否安全通过？
- (3) 在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过 8m，那么两排灯的水平距离最小是多少米？

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$ ，10m .

(2) 这辆货车能安全通过 .

(3) $4\sqrt{3}$ m .

【解析】 (1) 根据题意得 $B(0, 4)$ ， $C(3, \frac{17}{2})$ ，

把 $B(0, 4)$ ， $C(3, \frac{17}{2})$ 代入 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} c = 4 \\ -\frac{1}{6} \times 3^2 + 3b + c = \frac{17}{2} \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$.

所以抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$ ，

则 $y = -\frac{1}{6}(x - 6)^2 + 10$ ，

所以 $D(6, 10)$ ，

所以拱顶 D 到地面 OA 的距离为 10m，

故答案为：10m .

(2) 由题意得货运汽车最外侧与地面 OA 的交点为 $(2, 0)$ 或 $(10, 0)$ ，

当 $x = 2$ 或 $x = 10$ 时， $y = \frac{22}{3} > 6$ ，

所以这辆货车能安全通过 .

(3) 令 $y = 8$ ，则 $-\frac{1}{6}(x - 6)^2 + 10 = 8$ ，解得 $x_1 = 6 + 2\sqrt{3}$ ， $x_2 = 6 - 2\sqrt{3}$ ，

则 $x_1 - x_2 = 4\sqrt{3}$ ，

所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}$ m .

故答案为： $4\sqrt{3}$ m .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

2. 轨迹问题

此题型将运动路线抽象为所给直角坐标系中的抛物线，正确地建立二次函数模型，准确地将已知数据转化为点的坐标，用待定系数法求出解析式，通过解析式解决一些测量问题或其他问题 .

栗子

11. 2017~2018学年10月广东广州海珠区江南中学初三上学期月考第8题3分 ★★

运动会上，某运动员掷铅球时，所掷的铅球的高 y (m) 与水平的距离 x (m) 之间的函数关系式为

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},$$
 则该运动员的成绩是 ().

A. 6m

B. 12m

C. 8m

D. 10m

【答案】 D

【解析】 令 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

$$\text{整理得: } x^2 - 8x - 20 = 0,$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0,$$

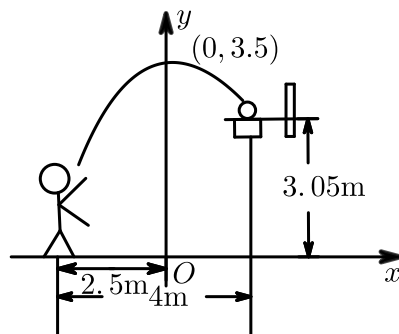
解得 $x_1 = 10$, $x_2 = -2$ (舍去),

答: 该运动员此次掷铅球的成绩是 10m.

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

12. 2019~2020学年10月湖北武汉硚口区武汉市十一崇仁初级中学初三上学期月考第9题3分 ★★

一位篮球运动员在距离篮圈中心水平距离 4m 处起跳投篮，球沿一条抛物线运动，当球运动的水平距离为 2.5m 时，达到最大高度 3.5m，然后准确落入篮筐内．已知篮圈中心距离地面高度为 3.05m，在如图所示的平面直角坐标系中，下列说法正确的是 ().



A. 此抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3.5$

B. 篮圈中心的坐标是 (4, 3.05)

C. 此抛物线的顶点坐标是 (3.5, 0)

D. 篮球出手时离地面的高度是 2m

【答案】 A

【解析】 A 选项: ∵ 抛物线的顶点坐标为 (0, 3.5),

∴ 可设抛物线的函数关系式为 $y = ax^2 + 3.5$.

∵ 篮圈中心 (1.5, 3.05) 在抛物线上, 将它的坐标代入上式, 得 $3.05 = a \times 1.5^2 + 3.5$,

$$\therefore a = -\frac{1}{5},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}x^2 + 3.5.$$

故本选项正确;

B 选项: 由图示知, 篮圈中心的坐标是 (1.5, 3.05), 故本选项错误;

C 选项: 由图示知, 此抛物线的顶点坐标是 (0, 3.5), 故本选项错误;

D 选项：设这次跳投时，球出手处离地面 $h\text{m}$ ，

因为 (1) 中求得 $y = -0.2x^2 + 3.5$ ，

$\therefore$ 当 $x = -2.5$ 时，

$$h = -0.2 \times (-2.5)^2 + 3.5 = 2.25\text{m}.$$

$\therefore$ 这次跳投时，球出手处离地面 2.25m 。

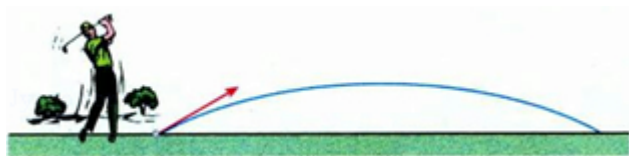
故本选项错误。

故选 A。

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

13. 2018~2019学年10月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第24题10分 ★★★

如图，以 40m/s 的速度将小球沿与地面成某一角度的方向击出时，小球的飞行路线将是一条抛物线。如果不考虑空气阻力，小球的飞行高度 h （单位： m ）与飞行时间（单位： s ）之间具有函数关系 $h = 20t - 5t^2$ 。请解答以下问题：



(1) 小球的飞行高度能否达到 15m ？如果能，需要多少飞行时间？

(2) 小球的飞行高度能否达到 20.5m ？为什么？

(3) 小球从飞出到落地要用多少时间？

【答案】 (1) 当小球的飞行 1s 和 3s 时，高度达到 15m 。

(2) 小球的飞行高度不能达到 20.5m 。

(3) 小球从飞出到落地要用 4s 。

【解析】 (1) 令 $h = 15$ ，得方程 $15 = 20t - 5t^2$ ，

解这个方程得： $t_1 = 1$ ， $t_2 = 3$ ，

当小球的飞行 1s 和 3s 时，高度达到 15m 。

(2) 令 $h = 20.5$ ，得方程 $20.5 = 20t - 5t^2$ ，

整理得： $t^2 - 4t + 4.1 = 0$ ，

因为 $(-4)^2 - 4 \times 4.1 < 0$ ，

所以方程无实数根，

所以小球的飞行高度不能达到 20.5m 。

(3) 小球飞出和落地时的高度都为 0 ，令 $h = 0$ ，

得方程 $0 = 20t - 5t^2$ ，

解这个方程得： $t_1 = 0$ ， $t_2 = 4$ ，

所以小球从飞出到落地要用 4s 。

